Distorsión Armónica Total en un Interpolador de Orden Cero

Javier Valcarce, <javier.valcarce@gmail.com>

***Resumen*—Cálculo de la Distorsión Armónica Total (THD) en un convertidor D/A con un filtro de interpolación de orden 0 (retenedor) a la salida, es decir, sin filtro paso bajo ideal.**

***Index Terms*—Distorsión Armónica Total (Total Harmonic Distortion), Convertidor Digital Analógico (Digital Analog Converter), Interpolador de orden cero (Zero-Order Interpolator).**

I. Introducción

TODO convertidor D/A necesita un filtro de interpolación de reconstrucción perfecta en la salida. En la práctica este filtro ideal no existe y se sustituye por 2 filtros:

- Un filtro interpolador de orden cero (retenedor) cuya respuesta al impulso $h(t)$ es un pulso cuadrado, que genera un señal de salida en forma de "escalera" $x_a(t)$.
- Un filtro paso bajo (no ideal) a continuación que sirve para eliminar todas las frecuencias $F \geq F_s/2$, es decir, suaviza los peldaños de la escalera y reconstruye la señal deseada $x(t)$.

sino podemos este segundo filtro la señal reconstruida tendrá distorsión, el nivel de distorsión introducido depende sólo del número de muestras por periodo de señal N y es precisamente lo que se calcula a continuación.

II. Distorsión Armónica Total (THD)

La distorsión armónica total (THD - Total Harmonic Distortion) es una medida de la distorsión no lineal que introducen los sistemas no lineales.

Si en un sistema lineal e invariante con el tiempo (LTI) introducimos un tono de frecuencia Ω_0 en la entrada, en la salida únicamente tendremos ese mismo tono[1]. En cambio, si el sistema no es lineal, en la salida tendremos, además del tono de entrada, otros tonos de frecuencia ($2\Omega_0$, $3\Omega_0$, $4\Omega_0 \ldots$) llamados **armónicos**.

La THD es precisamente una medida de la potencia de los armónicos que contiene una señal "sinusoidal" (pero que no es tal porque tiene armónicos, es decir, está distorsionada). La definición es

$$\text{THD} = \frac{P_1 + P_2 + \ldots + P_N}{P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_N}$$

donde P_0 es la potencia del tono fundamental y P_i con $i > 0$ es la potencia del armónico i-ésimo presente en la señal. Es decir, es la potencia de los armónicos dividida por la potencia total de la señal por tanto $0 \leq \text{THD} \leq 1$.

[1]Con una amplitud y fase posiblemente diferentes, dependiento de la función de transferencia del sistema LTI

III. Cálculo de la serie de Fourier de la señal de salida $x_a(t)$

Podemos ver la señal de salida en escalera $x_a(t)$ generada por el DAC como el tono original $x(t) = A\cos(\Omega_0 t)$ muestreado con un tren de deltas $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$ y luego pasado a través de un filtro cuya respuesta al impulso es

$$h(t) = \begin{cases} B & \text{si } 0 \leq t \leq T_s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la transformada de fourier (TF) de una señal continua $x(t)$ multiplicada por un tren de deltas $p(t)$ es

$$x_p(t) = x(t) * p(t) \overset{TF}{\longleftrightarrow} X_p(\Omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T_s}\right)$$

como $x(t)$ es un coseno su espectro es un par de deltas, usando la propiedad de las funciones delta $\delta(z - z_o)g(z) = \delta(z - z_o)g(z_0)$ tenemos que el espectro de $x_p(t)$ es

$$X_p(\Omega) = \frac{A\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [\delta(\Omega - (kN-1)\Omega_0) + \delta(\Omega - (kN+1)\Omega_0)] \quad (1)$$

esta señal pasa a través del filtro $h(t)$ y dado que $h(t)$ es un pulso cuadrado de anchura T_s y altura B su transformada es una sinc

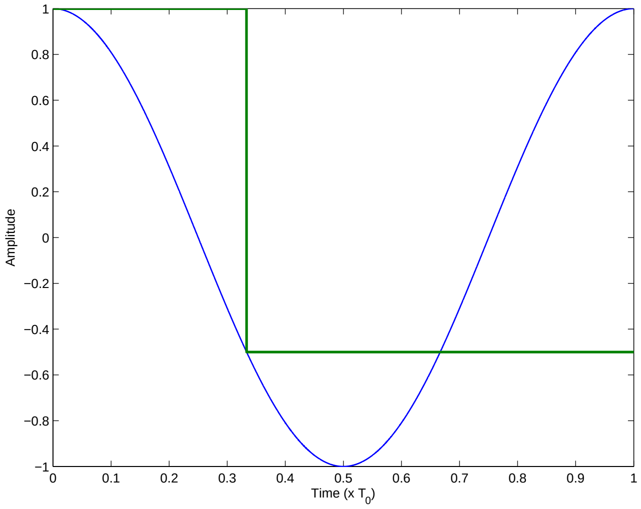
$$H(\Omega) = \frac{2B\sin(\Omega T_s/2)}{\Omega} e^{-j\pi T_s/2}$$

la convolución en tiempo es producto en frecuencia así que tenemos finalmente que el espectro de $x_a(t)$, que en este caso son los coeficientes de la serie de Fourier ya que $x_a(t)$ es periodica, es

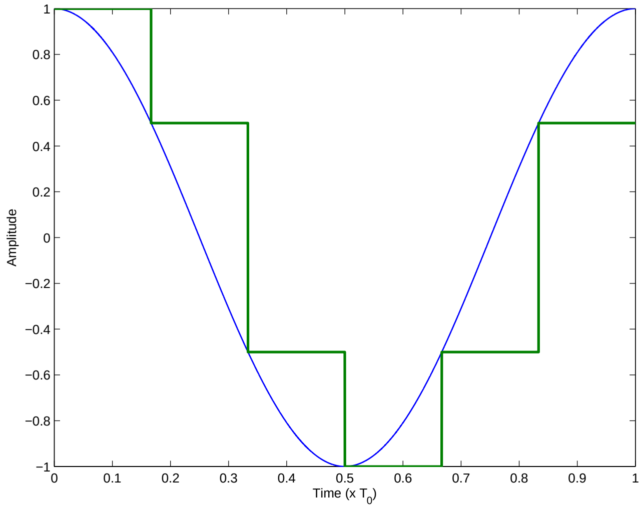
$$X_a(\Omega) = H(\Omega) X_p(\Omega) \quad (2)$$

$$X_a(\Omega) = \frac{A\pi}{T_S} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin(\Omega T_s/2)}{\Omega} e^{-j\pi T_s/2} [\delta(\Omega - (kN-1)\Omega_0) + \delta(\Omega - (kN+1)\Omega_0)] \quad (3)$$

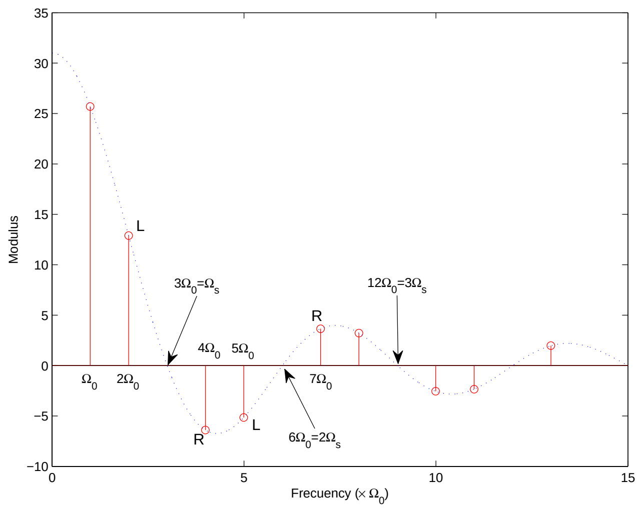
el término de fase en la expresión anterior no interesa demasiado, sólo interesa el módulo de cada uno de los coeficientes de Fourier ya que vamos a hacer un cálculo de potencia. Las figuras siguiente muestran los coeficientes de Fourier de $x_a(t)$, la línea de puntos indica simplemente la forma de $H(\Omega)$, la transformada de la respuesta al impulso $h(t)$ del filtro de reconstrucción de la señal.



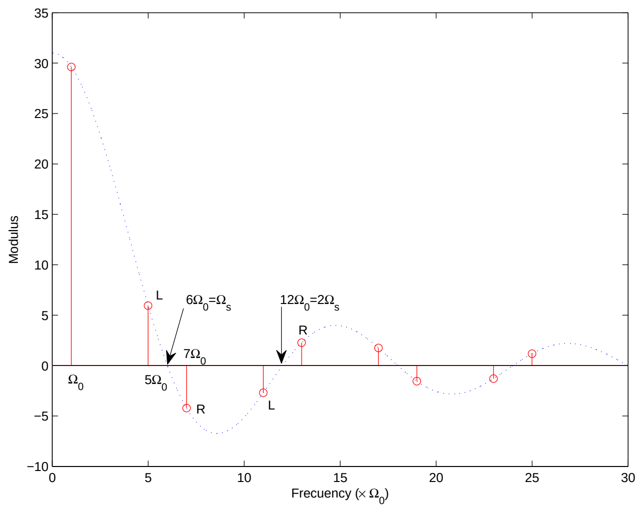
(a) $x_a(t)$ para $N = 3$



(b) $x_a(t)$ para $N = 6$



(c) $X_a(\Omega)$ para $N = 3$



(d) $X_a(\Omega)$ para $N = 6$

Los coeficientes de la serie de Fourier son los términos que ponderan cada delta en el espectro dividos por 2π, después de simplificar las expresiones usando identidades algebráicas[2] tenemos que dichos coeficientes son

$$c_k^L = \frac{AB}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\frac{N}{|kN-1|} \tag{4}$$

$$c_k^R = \frac{AB}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{N}\right)\frac{N}{|kN+1|} \tag{5}$$

siendo c_k^L y c_k^R los coeficientes de Fourier de $x_a(t)$ correspondientes a la función delta que está a la izquierda y a la derecha de $k\Omega_s$ respectivamente. Podemos ver que si hacemos tender $N \to \infty$ entonces $\{c_k^L, c_k^R\} \to 0$ para $k > 0$ como es lógico. En $k = 0$ permace la delta correspondiente al coseno

$$\lim_{N\to\infty} c_k^X = \begin{cases} \frac{AB}{2\pi}\frac{\pi}{N}\frac{N}{1} = \frac{AB}{2} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$$

[2] $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \cos(a)\sin(b)$

que es la serie de Fourier correspondiente a un coseno perfecto. Esto es lógico ya que a medida que $N \to \infty$ la señal escalera $x_a(t)$ tiene los peldaños más pequeños y cada vez se ajusta y se parece más a $x(t)$.

La potencia de un armónico cualquiera se calcula a partir de su coeficiente de Fourier correspondiente de la siguiente forma

$$P_k^X = 2|c_k^X|^2$$

IV. Cálculo de la THD

La potencia total (P_T) de la señal de salida $x_a(t)$ es la suma de la potencia del armónico fundamental c_0 más la potencia de sus armónicos (P_A)

$$P_T = 2|c_0|^2 + P_A = 2|c_0|^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2|c_k^L|^2 + 2|c_k^R|^2$$

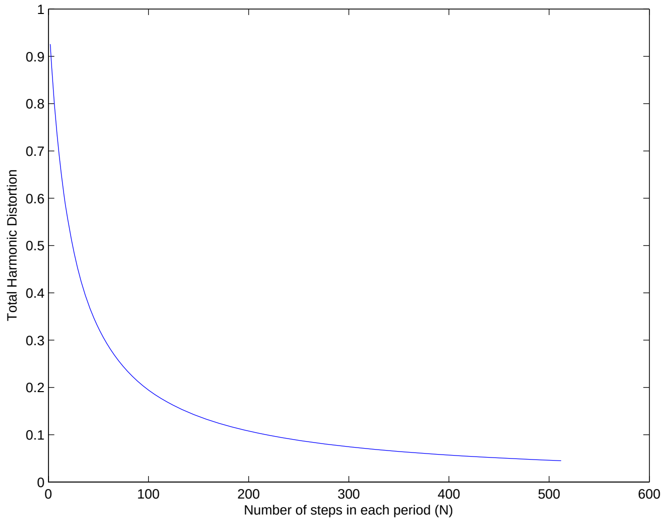


Figura 1. Distorsión Armónica Total (THD) en función de N

La expresión final de la THD, después de simplificar términos comunes en el numerador y denominador es

$$\mathrm{THD} = \frac{P_A}{P_T} = 1 - \frac{2|c_0|^2}{P_T} = 1 - \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2kN}{(kN)^2 - 1}} \qquad (6)$$

recordemos que $N \geq 2$ para satisfacer el criterio de Nyquist. De nuevo, si $N \to \infty$ entonces la THD $\to 0$, como se puede ver en la Figura 1.